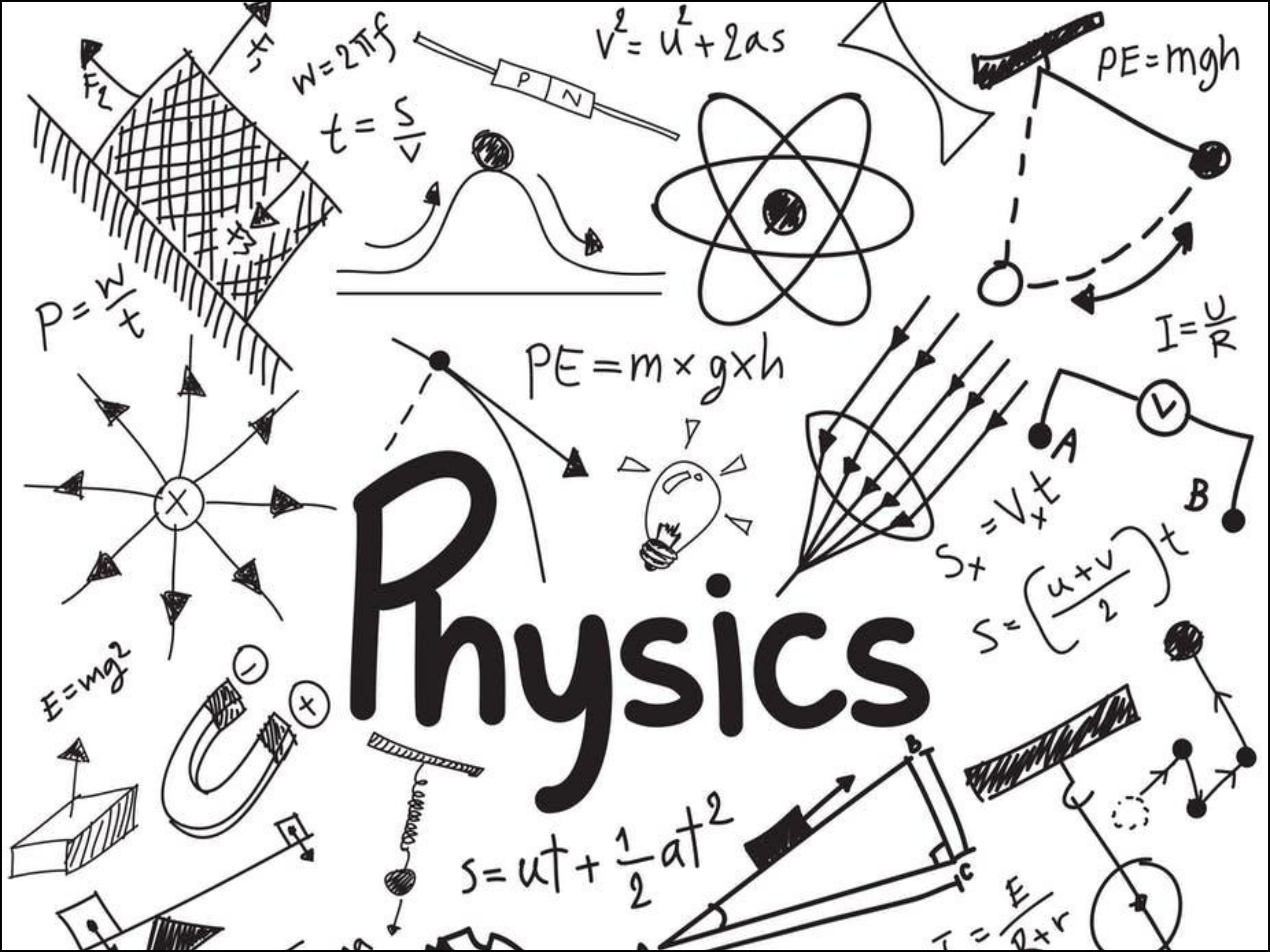


Physics
F_2
$W = 2\pi f$
P N
$V^2 = u^2 + 2as$
$PE = mgh$
$t = \frac{S}{V}$
$P = \frac{W}{t}$
$PE = m \times g \times h$
$I = \frac{U}{R}$
A
B
$S_x = V_x t$
$S = \left(\frac{u+v}{2}\right)t$
$E = mg^2$
$s = ut + \frac{1}{2}at^2$
B
C

Reminder…

- **Διαλέξεις**
  - **Προαιρετική** παρουσία!
  - Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
  - Δεν υπάρχουν απουσίες
  - Υπάρχει **<u>σεβασμός</u>** στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
  - **Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας**: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος

Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Εικόνα: Στη φυσική, η ενέργεια είναι μια ιδιότητα των αντικειμένων που μπορεί να μεταφερθεί σε άλλα αντικείμενα ή να μετατραπεί σε διάφορες μορφές, αλλά δεν μπορεί να δημιουργηθεί ή να καταστραφεί. Η "ικανότητα ενός συστήματος να παράγει έργο" είναι μια κοινή περιγραφή, αλλά είναι δύσκολο να δοθεί ένας ενιαίος συνολικός ορισμός της ενέργειας, εξαιτίας των πολλών μορφών της.

Φυσική για Μηχανικούς

Ενέργεια Συστήματος

Ενέργεια Συστήματος (review…)

- **Κινητική Ενέργεια**

$$K = \frac{1}{2}mu^2 \Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2}mu_f^2 - \frac{1}{2}mu_i^2$$

  - Σχετίζεται με την **κίνηση** ενός συστήματος (των μελών του)

- **Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια**

$$U_g = mgy \Rightarrow \Delta U_g = mgy_f - mgy_i$$

  - Σχετίζεται με την **αλλαγή σχετικής θέσης** (κατακόρυφη απομάκρυνση y) **των μελών του συστήματος** {σώματα, Γη} σε σχέση με τη Γη

Ενέργεια Συστήματος (review…)

- **Ελαστική Δυναμική Ενέργεια**

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \Delta U_s = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

  - Σχετίζεται με τη **μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας ενός συστήματος** {ελατηρίου, σώματος}

- **Θερμική Ενέργεια**

$$\Delta E_{th} = f_k \Delta x = -W_{friction}$$

  - Σχετίζεται με τη **μεταβολή στη θερμοκρασία του συστήματος** {σώμα, επιφάνεια}

Ενέργεια Συστήματος (review…)

- **Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας – Έργου**

- Όταν σε ένα σύστημα ασκούνται **εξωτερικές δυνάμεις**, το συνολικό έργο που παράγεται από αυτές στο σύστημα ισούται με τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος

$$\boxed{\Delta K = K_f - K_i = \sum W_{ext.forces}}$$

Ενέργεια Συστήματος

- Θεωρήστε το διπλανό σύστημα: **{μπάλα + επικλινές + έδαφος (Γη)}** Η απόσταση που μια μπάλα ολισθαίνει σε μια επικλινή επιφάνεια <u>με τριβές</u>, έχει μεγάλη σημασία για το **πόση** *δυναμική* ενέργεια μετατρέπεται σε *θερμική*

  - Μεγαλύτερη απόσταση → μεγαλύτερο ποσοστό **δυναμικής** ενέργειας μετατρέπεται σε **θερμική** λόγω του έργου της δύναμης τριβής
  - Υπάρχει εξάρτηση από το «μονοπάτι»

- Αντίθετα, το έργο της δύναμης της βαρύτητας δεν εξαρτάται από το «μονοπάτι» που ακολουθεί το σώμα!

$$W_g = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{y} = -mg\vec{j} \cdot (y_f - y_i)\vec{j} = mg\boldsymbol{y_i}$$

$$W_{\tau\rho\iota\beta\eta\varsigma} = -f_k \boldsymbol{\Delta x}$$

Ενέργεια Συστήματος

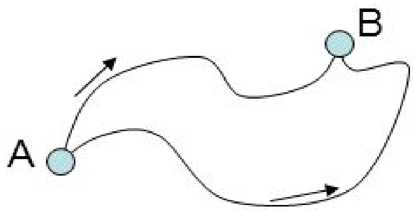
- Αυτή η εξάρτηση από τη διαδρομή («μονοπάτι») που ακολουθεί το σώμα ορίζει δυο κατηγορίες δυνάμεων:
  - ***Συντηρητικές (conservative)***
    - Ανεξάρτητη από τη διαδρομή, π.χ. δύναμη βαρύτητας
  - ***Μη συντηρητικές (nonconservative)***
    - Εξάρτηση από τη διαδρομή, π.χ. δύναμη τριβής ολίσθησης

- **Συντηρητικές δυνάμεις – Ιδιότητες:**
  1. Το **έργο** που παράγεται από μια τέτοια δύναμη σε ένα σώμα που κινείται ανάμεσα σε οποιαδήποτε δυο σημεία είναι **ανεξάρτητο της διαδρομής** ανάμεσα σε αυτά.
  2. Το **έργο** που παράγεται από μια τέτοια δύναμη σε ένα σώμα που κινείται **σε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν**.

Ενέργεια Συστήματος

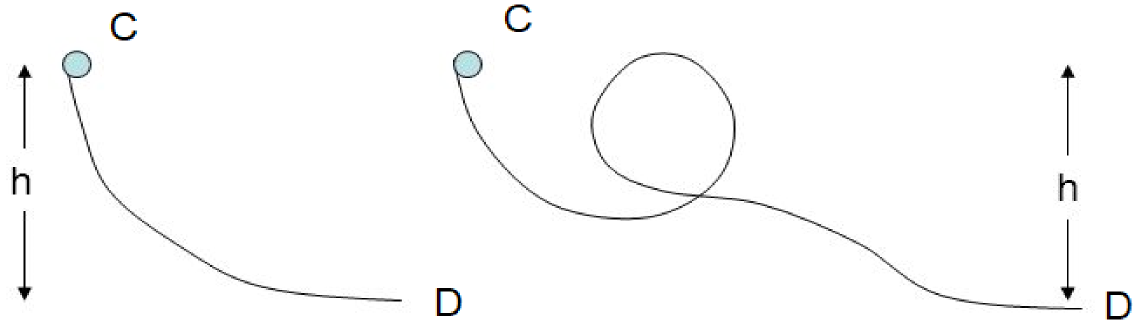
Έστω ότι οι κινήσεις μεταξύ των σημείων οφείλονται σε μια συντηρητική δύναμη

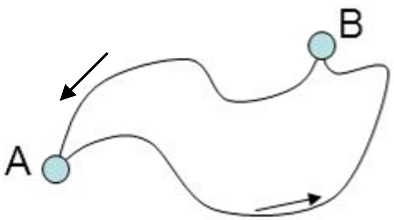
Συντηρητικές δυνάμεις - Ιδιότητες:



Το έργο που παράγεται στη διαδρομή από το A στο B είναι το ίδιο για κάθε μια από τις διαδρομές.

Όμοια και για τις διαδρομές από το C στο D.





Το έργο μιας συντηρητικής δύναμης από το A στο B και ξανά μετά στο A είναι μηδέν (κλειστή διαδρομή)

Ενέργεια Συστήματος

- Μια δύναμη λέγεται ***μη συντηρητική*** αν δεν ικανοποιεί (τουλάχιστον μια από) τις ιδιότητες 1 και 2 που είδαμε πριν
  - Παράδειγμα: τριβή ολίσθησης

- Η δράση **αποκλειστικά συντηρητικών** δυνάμεων είναι μεγάλο πλεονέκτημα για ένα σύστημα, καθώς μπορεί να υποστηρίξει ένα συγκεκριμένο ενεργειακό θεώρημα

- Ας ορίσουμε το άθροισμα της κινητικής K και της (μιας ή περισσότερων) δυναμικής ενέργειας U ενός **πολυμελούς** συστήματος ως τη ***μηχανική ενέργεια*** του συστήματος:

$$E_{mech} = K + U$$

Ενέργεια Συστήματος

- Αποδεικνύεται πειραματικά ότι οι ***μη** συντηρητικές* δυνάμεις που δρουν σε ένα **πολυμελές** σύστημα **αλλάζουν** τη **μηχανική ενέργεια** του συστήματος! Αντίθετα, **οι *συντηρητικές* τη διατηρούν**!

Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας – ΑΔΜΕ

$$\Delta E_{mech} = \Delta K + \Delta U = 0$$

μόνο αν στο σύστημα δρουν **αποκλειστικά συντηρητικές** δυνάμεις!

- Προφανώς για τον ορισμό δυναμικής ενέργειας απαιτείται **πολυμελές** σύστημα

- Και **ποιες** δυνάμεις είναι συντηρητικές?...

Ενέργεια Συστήματος

- **Παραδείγματα συντηρητικών δυνάμεων**

  - **Δύναμη Βαρύτητας $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{g}}$**
    - $W_g = \vec{F}_g \cdot \Delta\vec{r} = -mg\vec{\boldsymbol{j}} \cdot (y_f - y_i)\vec{\boldsymbol{j}} = mgy_i - mgy_f$
    - Εξάρτηση μόνο από τα y_i, y_f, **όχι** από τη διαδρομή σε αυτά
    - $W_g = 0$, σε **κλειστή** διαδρομή ($y_i = y_f$)

  - **Δύναμη ελατηρίου $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{s}}$**
    - $W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$
    - Εξάρτηση μόνο από τα x_i, x_f, **όχι** από τη διαδρομή σε αυτά
    - $W_s = 0$, σε **κλειστή** διαδρομή ($x_i = x_f$)

Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα:**
- Ένα παιδί μάζας m ολισθαίνει από ακίνητη θέση σε μια νεροτσουλήθρα ύψους $h = 8.5\ m$. Υποθέστε ότι η νεροτσουλήθρα περιγράφει μια επιφάνεια χωρίς τριβές και βρείτε την ταχύτητα του παιδιού στο τέρμα της.

Θεωρούμε ως σύστημα το {παιδί, Γη}.

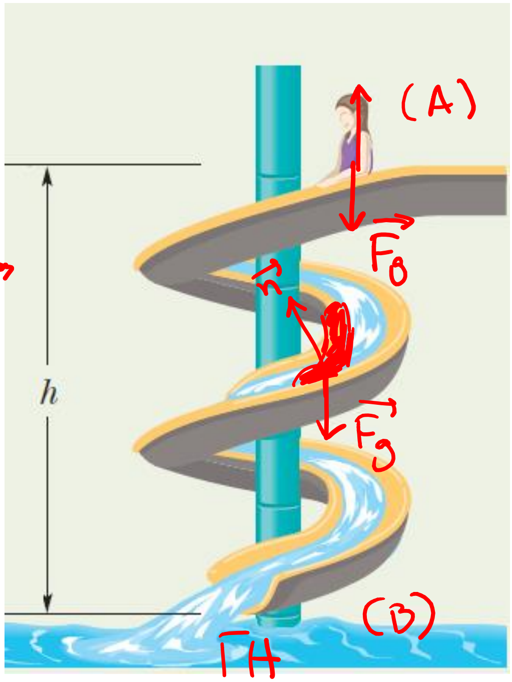
Στο παιδί ασκούνται δυο δυνάμεις:

— Η δύναμη του βάρους, $\vec{F}_g$: ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΗ!

— Η κάθετη δύναμη από την τσουλήθρα, $\vec{n}$

Η δύναμη $\vec{n}$ είναι πάντα κάθετη στη μετατόπιση του παιδιού στη διαδρομή του:

$$W_n = 0$$



Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**

Ισχύει η Α.Δ.Μ.Ε στη διαδρομή Α→Β.

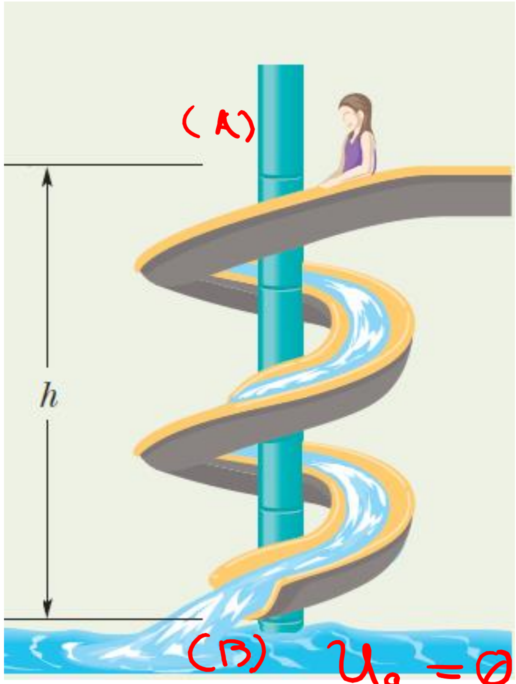
$$\Delta E_{mech}^{A\to B} = 0 \iff \Delta K_{A\to B} + \Delta U_{A\to B} = 0$$

$$K_B - K_A + U_{gB} - U_{gA} = 0$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}u_B^2 - 0 + 0 - \cancel{m}gh = 0$$

$$\frac{1}{2}u_B^2 = gh \iff u_B^2 = 2gh \implies u_B = \sqrt{2gh}\,.$$

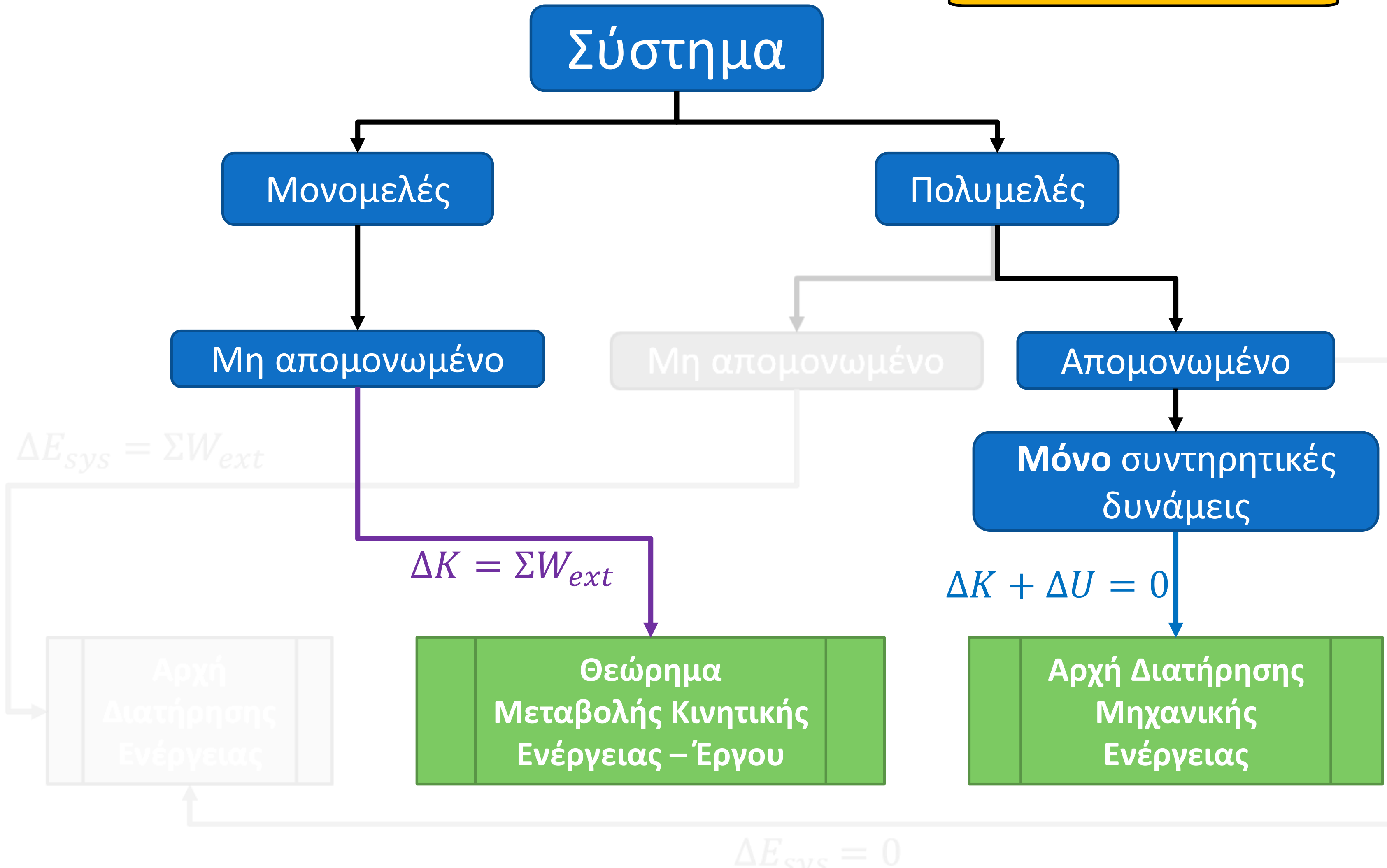
Άρα $u_B \cong 13\ \frac{m}{s}$



$U_{g_B} = 0$

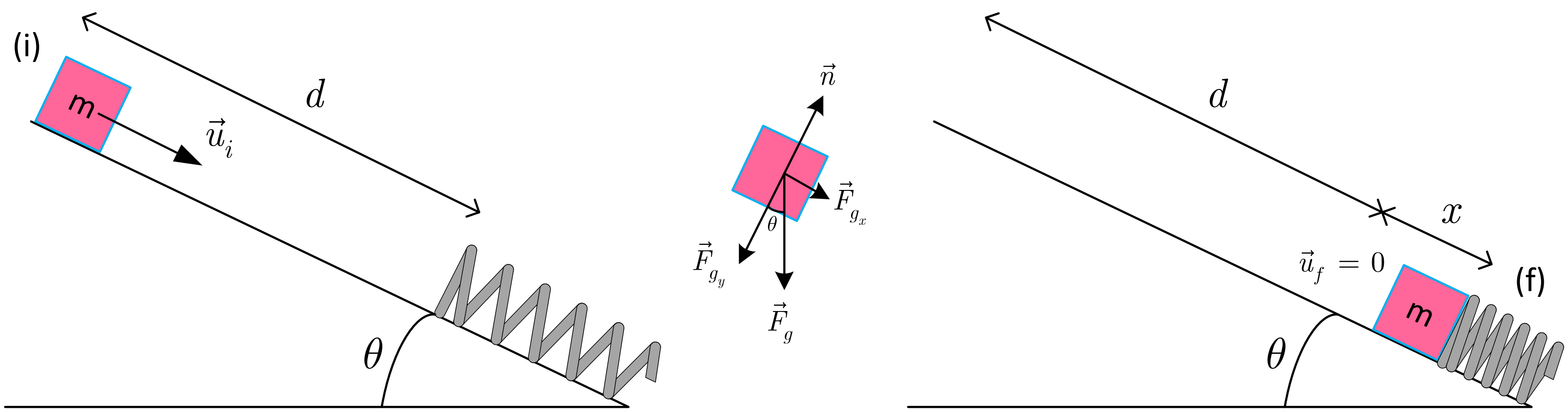
Διατήρηση της Ενέργειας

Στρατηγική επίλυσης προβλημάτων



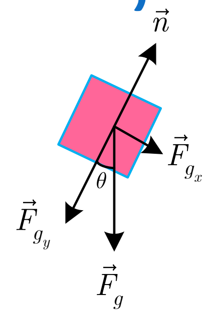
Ενέργεια Συστήματος

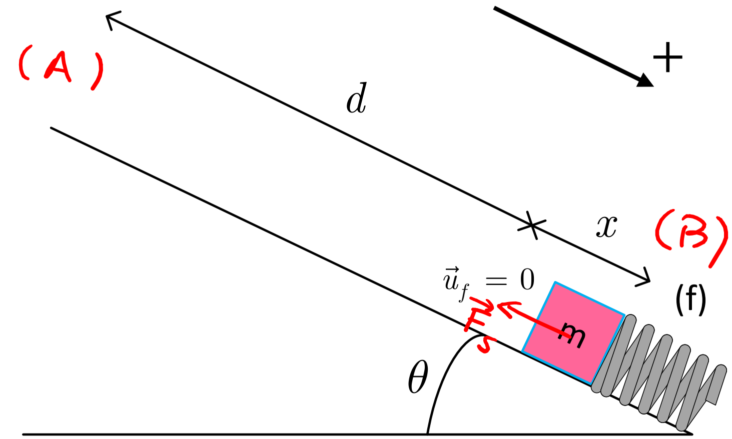
- **Παράδειγμα (revisited):**
- Λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ έχει ελατήριο σταθεράς k στερεωμένο στο κάτω μέρος του. Ένα κουτί μάζας m τοποθετείται πάνω στο κεκλιμένο σε απόσταση d από το ελατήριο. Από τη θέση αυτή, το κουτί βάλλεται προς το ελατήριο με ταχύτητα u_0. Πόσο έχει συμπιεστεί το ελατήριο όταν το κουτί φτάνει στιγμιαία σε ηρεμία?



Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**





Θεωρούμε ως σύστημα το {σώμα, ελατήριο, Γη}.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα μάζας m του συστήματος φαίνονται στο σχήμα. Πλην της $\vec{n}$ που δεν παράγει έργο λόγω καθετότητας στο διάνυσμα της μετατόπισης, οι δυνάμεις $\vec{F_g}$, $\vec{F_s}$ είναι συντηρητικές και εσωτερικές στο σύστημα, το οποίο είναι απομονωμένο. Ισχύει η

$$\text{ΑΔΜΕ}_{A\to B}: \quad \Delta K_{A\to B} + \Delta U_{g\,A\to B} + \Delta U_{s\,A\to B} = 0$$

$$K_B - K_A + U_{g_B} - U_{g_A} + U_{s_B} - U_{s_A} = 0$$

$$0 - \frac{1}{2} m u_A^2 + 0 - mg(d+x)\sin\theta + \frac{1}{2} k x^2 - 0 = 0$$

Πολυώνυμο ως προς x, ίδια λύση στη συνέχεια με αυτή που είχαμε δει στην προηγούμενη διάλεξη (ίδια άσκηση ακριβώς)

Ενέργεια Συστήματος

- Δύναμη βάρους → συντηρητική δύναμη →βαρυτική δυναμική ενέργεια

- Δύναμη ελατηρίου → συντηρητική δύναμη → ελαστική δυναμική ενέργεια

(peek into the future ☺)

- Ηλεκτρική δύναμη → συντηρητική δύναμη → ηλεκτρική δυναμική ενέργεια
  - ...που σχετίζεται με το ηλεκτρικό δυναμικό

- Παρατηρούμε κάποιο μοτίβο...
- Μια **συντηρητική** δύναμη σχετίζεται με τη **μεταβολή μιας δυναμικής ενέργειας**!

Ενέργεια Συστήματος

- Έστω ένα **πολυμελές** σύστημα που αλλάζει από μια διάταξη των μελών του σε μια άλλη λόγω έργου <u>μιας</u> ***εσωτερικής συντηρητικής δύναμης***, $W_{F,int}$
  - ...χωρίς επίδραση άλλων δυνάμεων (**απομονωμένο** σύστημα)

- Ένα **σώμα** από τα μέλη του **κινείται** από μια θέση i (αρχική) σε μια θέση f (τελική)
- **Μεταβλήθηκε** (έστω αυξήθηκε) η **κινητική του ενέργεια**
- Πρέπει **ισόποσα** να **μεταβληθεί «αντίστροφα»** (μειωθεί) **η δυναμική του ενέργεια**
  - ...λόγω Α.Δ.Μ.Ε!

$$W_{F,int} = \Delta K = -\Delta U = -(U_f - U_i) = U_i - U_f$$

Ενέργεια Συστήματος

- Το έργο $W_{F,int}$ που παράγεται από μια ***εσωτερική συντηρητική δύναμη σε ένα άλλο σώμα που είναι μέλος του συστήματος*** ισούται με την αρνητική μεταβολή της δυναμικής του ενέργειας

  - Π.χ. έργο **βάρους** κατά την ανύψωση βιβλίου στο σύστημα {Γη-βιβλίο}

$$W_{F_g} = -\Delta U_g$$

  - Π.χ. έργο **δύναμης του ελατηρίου** κατά τη μετατόπιση του από τη θέση ισορροπίας στο σύστημα {ελατήριο-σώμα}

$$W_s = -\Delta U_s$$

Ενέργεια Συστήματος

- Έστω ότι αυτή η ***εσωτερική συντηρητική δύναμη*** $\vec{F}_{\boldsymbol{int}}$ προκαλεί **αλλαγή της διάταξης** του συστήματος λόγω της **κίνησης** ενός από τα σώματα επάνω **στο $\boldsymbol{x'x}$ άξονα**
  - Έστω ότι η δύναμη ασκείται υπό γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα
    - Τα ίδια ακριβώς θα ισχύουν και για δύναμη υπό γωνία με τον άξονα $y'y$ ή τον $z'z$, αλλά χάριν απλότητας ας κρατήσουμε μόνο τον $x'x$

- Το έργο της (σταθερής) δύναμης αυτής θα είναι (ορισμός έργου):

$$W_{F,int} = \vec{F}_{int} \cdot \Delta\vec{x} = F_{int}\Delta x \cos\theta = F_x \Delta x = -\Delta U$$

Ενέργεια Συστήματος

- Θεωρώντας ότι η μετατόπιση του σώματος $\boldsymbol{\Delta x}$ είναι **απειροστά μικρή**, μπορούμε να πούμε ότι και η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας $\boldsymbol{\Delta U}$ είναι **απειροστά μικρή**

$$dU = -F_x \mathrm{d}x \Rightarrow F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Έτσι

$$\boxed{F_x = -\frac{dU}{dx}} \Rightarrow U(x) = -\int F_x dx + U_i$$

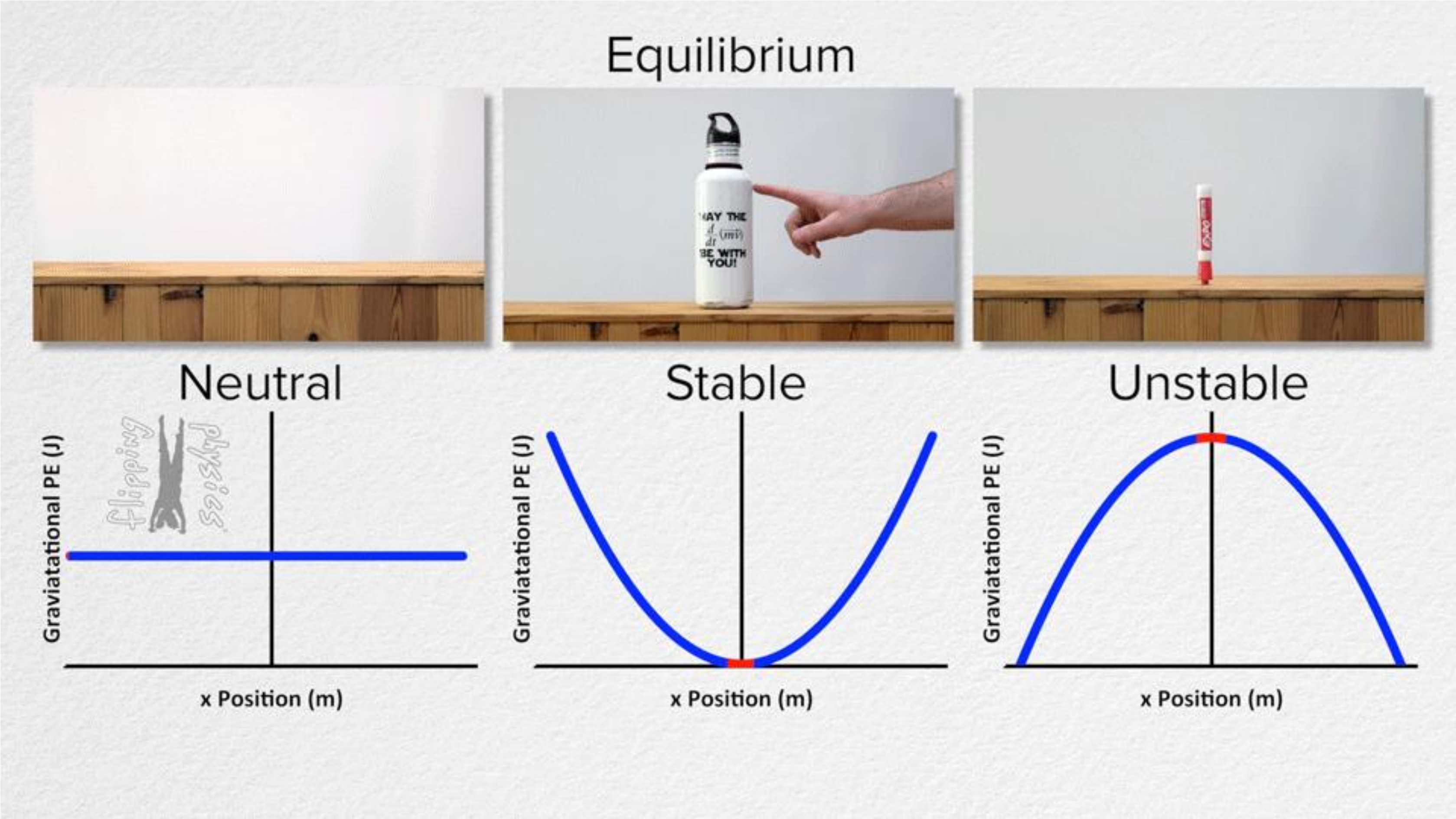
- Η συνάρτηση $U(x)$ λέγεται **συνάρτηση δυναμικής ενέργειας**
- Η θέση x όπου $F_x = 0$ λέγεται **θέση ισορροπίας**
- Προφανώς ισχύει και

$$F_y = -\frac{dU}{dy}, \qquad F_z = -\frac{dU}{dz}$$

Ενέργεια Συστήματος

- **Ευσταθής ισορροπία (stable equilibrium)**
  - Ένα σύστημα λέγεται ευσταθούς ισορροπίας όταν οποιαδήποτε μεταβολή μακριά από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια την έγερση μιας δύναμης που επαναφέρει το σύστημα στη θέση ισορροπίας του
    - Παραδείγματα: σύστημα σώματος-ελατηρίου, σύστημα μπίλιας-κυρτού μπώλ-Γης
- **Ασταθής ισορροπία (unstable equilibrium)**
  - Ένα σύστημα λέγεται ασταθούς ισορροπίας όταν οποιαδήποτε μεταβολή μακριά από τη θέση ισορροπίας του έχει ως συνέπεια την έγερση μιας δύναμης που απομακρύνει περισσότερο το σύστημα από τη θέση ισορροπίας του
    - Παραδείγματα: σύστημα μολυβιού-Γης που ισορροπεί στη μύτη του επάνω σε μια επιφάνεια, σύστημα μπάλας-Γης στην κορυφή ενός λόφου
- **Ουδέτερη ισορροπία (neutral equilibrium)**
  - Ένα σύστημα λέγεται ουδέτερης ισορροπίας αν η θέση ισορροπίας του δεν εξαρτάται από μετατοπίσεις από την αρχική του θέση, δηλ. όταν παραμένει στη νέα του θέση μετά από κάποια μετατόπιση χωρίς να επιστρέφει πίσω στην αρχική του θέση
    - Παράδειγμα: σύστημα μπάλας-οριζόντιου εδάφους, σύστημα βιβλίου πλευρικά τοποθετημένου-οριζόντιου εδάφους

Ενέργεια Συστήματος



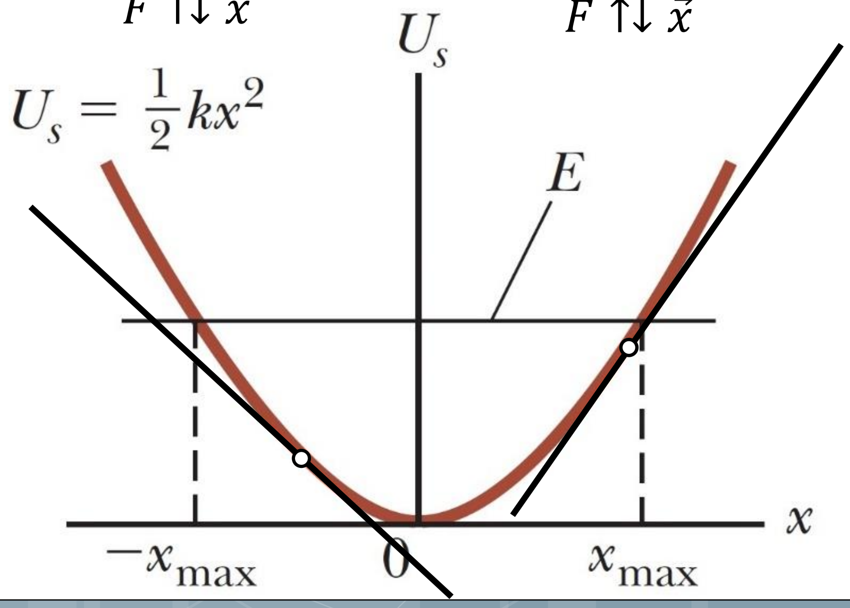
Ενέργεια Συστήματος

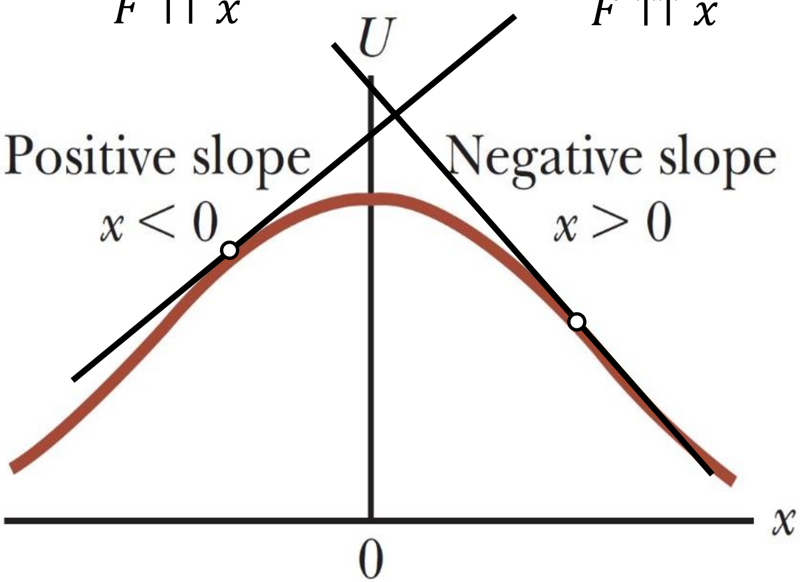
$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Η κλίση $\frac{dU}{dx}$ μας πληροφορεί για την ευστάθεια ή αστάθεια ενός συστήματος
- **Παραδείγματα:**

$\frac{dU}{dx} < 0 \Rightarrow F_x > 0$ $\quad \frac{dU}{dx} > 0 \Rightarrow F_x < 0$ $\quad \frac{dU}{dx} > 0 \Rightarrow F_x < 0$ $\quad \frac{dU}{dx} < 0 \Rightarrow F_x > 0$

$\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{x}$ $\quad \vec{F} \uparrow\downarrow \vec{x}$ $\quad \vec{F} \uparrow\uparrow \vec{x}$ $\quad \vec{F} \uparrow\uparrow \vec{x}$





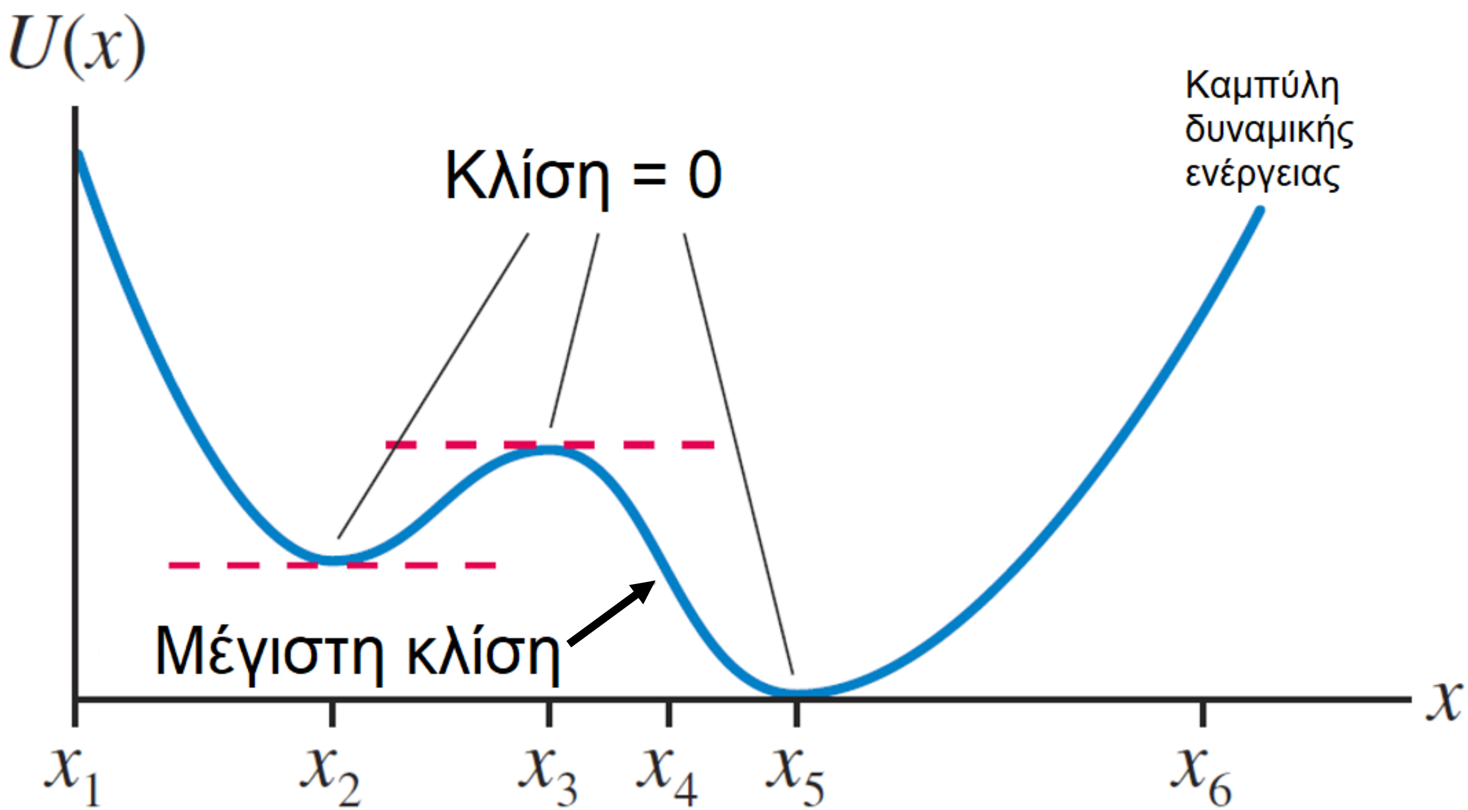
Ενέργεια Συστήματος

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

- Όταν $\vec{F} \upuparrows \vec{x}$, η δύναμη που εγείρεται είναι ομόρροπη με τα μετατόπιση
  - Το σύστημα μετατοπίζεται περαιτέρω μακριά από τη θέση ισορροπίας του!
    - Αστάθεια!
- Όταν $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{x}$, η δύναμη που εγείρεται είναι αντίρροπη με τα μετατόπιση
  - Το σύστημα επιστρέφει στη θέση ισορροπίας του!
    - Ευστάθεια!

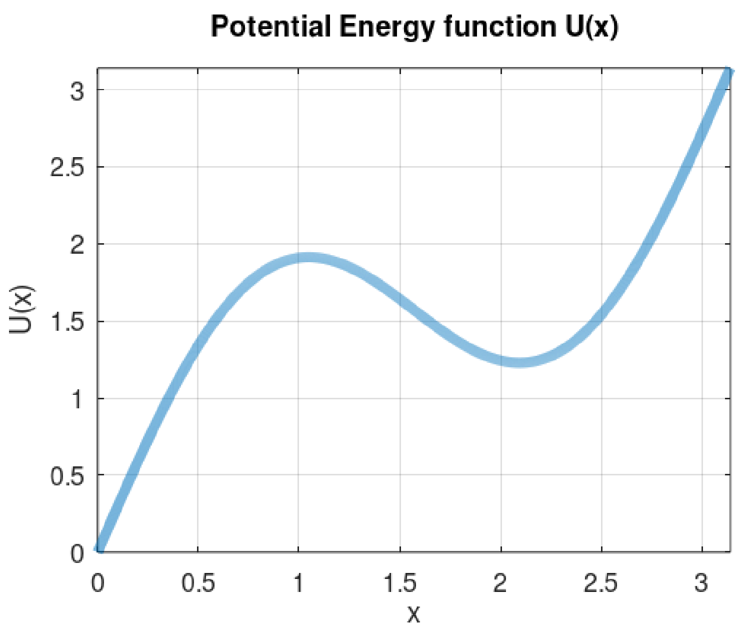
Ενέργεια Συστήματος

- Ένα πραγματικό σύστημα μπορεί να έχει **περιοχές** ευσταθούς, ασταθούς, και ουδέτερης ισορροπίας



Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα:**
- Ένα σύστημα έχει δυναμική ενέργεια $U(x) = x + \sin(2x)$ με x σε μέτρα στο διάστημα $0 \leq\ x \leq\ \pi$.
  α) Βρείτε τις θέσεις ισορροπίας στο διάστημα $[0, \pi]$.
  β) Για καθεμιά από αυτές, ελέγξτε το είδος της θέσης ισορροπίας.



Ενέργεια Συστήματος

- **<u>Παράδειγμα – Λύση:</u>**
- Ένα σύστημα έχει δυναμική ενέργεια $U(x) = x + \sin(2x)$ με x σε μέτρα στο διάστημα $0 \leq x \leq \pi$.
  α) Βρείτε τις θέσεις ισορροπίας στο διάστημα $[0, \pi]$.

Τα σημεία ισορροπίας στο $[0,\pi]$ αποτελούν λύσεις της

$$F_x = 0 \iff -\frac{dU}{dx} = 0$$

Είναι

$$\frac{dU}{dx} = (x + \sin(2x))' = 1 + 2\cos(2x) = 0$$

Άρα

$$\cos(2x) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\cancel{2}x = \cancel{2}k\pi \pm \frac{\cancel{2}\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Με δοκιμές για το k, βρίσκουμε

$$x_1 = \frac{\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{2\pi}{3}$$

Ενέργεια Συστήματος

- **<u>Παράδειγμα – Λύση:</u>**
- Ένα σύστημα έχει δυναμική ενέργεια $U(x) = x + \sin(2x)$ με x σε μέτρα στο διάστημα $0 \leq \ x \leq \ \pi$.
  β) Για καθεμιά από αυτές, ελέγξτε το είδος της θέσης ισορροπίας.

Πρόταση 6.10 ***Κριτήριο δεύτερης παραγώγου.*** *Έστω ότι η $y = f(x)$ έχει παράγωγο στο διάστημα (a,b), ο ξ ανήκει στο (a,b) και η $y = f(x)$ έχει δεύτερη παράγωγο στον ξ.*
(i) Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) > 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $y = f(x)$.
(ii) Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) < 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $y = f(x)$.

Ενέργεια Συστήματος

- **Παράδειγμα – Λύση:**
- Ένα σύστημα έχει δυναμική ενέργεια $U(x) = x + \sin(2x)$ με x σε μέτρα στο διάστημα $0 \leq x \leq \pi$.
  β) Για καθεμιά από αυτές, ελέγξτε το είδος της θέσης ισορροπίας.

Με βάση το κριτήριο της 2ης παραγώγου, θα έχουμε:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = (1 + 2\cos(2x))' = -4\sin(2x)$$

• Για $x_1 = \frac{\pi}{3}$, η 2η παράγωγος είναι $\frac{d^2U}{dx^2}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4\overbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}^{>0} < 0$

άρα το x_1 είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $U(x) \Rightarrow$ σημείο ασταθούς ισορροπίας

• Για $x_2 = \frac{2\pi}{3}$, η 2η παράγωγος είναι $\frac{d^2U}{dx^2}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -4\underbrace{\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)}_{<0} > 0$

άρα το x_2 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $U(x) \Rightarrow$ ευσταθής ισορροπία

Τέλος Διάλεξης